EMINES Examen 2026: Information Quantique

Zaki Leghtas*

Lundi 9 Février 2026

Durée: 2h00. Les documents sont autorisés, mais pas les ordinateurs, téléphones et autre objets connectés. Le barème est donné à titre indicatif. Les notations utilisées sont rappelées à la fin du sujet.

1 Questions de cours (10 points)

1. Normalisez l'état $|\psi_1\rangle = 2\,|0\rangle + 4i\,|1\rangle$. Je mesure l'opérateur $\hat{Z}$. Quels sont les résultats de mesure possibles ? Quelles sont les probabilités associées ? Dans quel état est projeté le qubit dans chaque situation ?
2. Quelle est la valeur moyenne de la mesure de $\hat{X}$ sur le qubit dans l'état $|\psi_1\rangle$?
3. Calculez les produits $\hat{H}\hat{X}\hat{H}$, $\hat{H}\hat{Y}\hat{H}$, $\hat{H}\hat{Z}\hat{H}$ (il est recommandé d'exprimer $\hat{H}$ comme somme d'opérateurs de Pauli).
4. Montrez que $\hat{H}\hat{T}\hat{H} = \exp\left(-i\frac{\pi}{8}\hat{X}\right)$, à une phase globale prêt.
5. Considérons deux qubits dans l'état $|\psi_2\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$. Ces deux qubits sont-ils intriqués?
6. Calculez $|\psi_3\rangle = \hat{Z} \otimes \hat{X}\,|\psi_2\rangle$. Est-ce que $|\psi_3\rangle$ est un état intriqué ?
7. Quelle est la dimension de l'espace des états de n qubits ? A partir de combien de qubits est il difficile pour un ordinateur classique de simuler leur état ?
8. Quel impact aurait la résolution de l'algorithme de Shor?

*zaki.leghtas@phys.ens.fr

2 Mesure d'une observable unitaire (4 points)

L'objectif de cet exercice est d'analyser un circuit qui permette la mesure d'une observable $\hat{U}$. Nous faisons l'hypothèse que cette observable qui est donc *Hermitienne*, est en plus *unitaire*. Nous supposons que les valeurs propres de $\hat{U}$ sont ± 1.

9. Calculez les états $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ dans le circuit de la Figure 1. Il est recommandé d'exprimer $|\psi\rangle$ dans la base des états propres de $\hat{U}$.
10. Quels sont les résultats de mesure possibles du premier qubit, et avec quelle probabilité ? Dans quel état est projeté le deuxième qubit selon le résultat de la mesure ?
11. Expliquez que ceci correspond bien à une mesure de l'observable $\hat{U}$.

3 Superdense coding (6 points)

L'objectif de cet exercice est d'analyser un circuit qui permet d'envoyer deux bits d'informations (x, y), où $x \in \{0, 1\}$ et $y \in \{0, 1\}$, en envoyant seulement un seul qubit! Ce protocole remarquable qui utilise l'intrication, est connu sous le nom de "superdense coding". Il a été découvert en 1970 par Bennett et Wiesner (mais publié seulement en 1992), et observé expérimentalement en 1996 par l'équipe de Zeilinger.

12. Calculez les états $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ dans le circuit de la Figure 2.
13. L'état $|\psi_2\rangle$ est-il intriqué ?
14. Calculez les états $|\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle, |\psi_5\rangle$. On traitera les cas 4 cas $(x, y) \in \{0, 1\}^2$.
15. Montez qu'on obtient bien les deux bits (x, y) en mesurant $\hat{Z}$ des deux qubits.

4 Notation

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\
\hat{Y} &= -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \\
\hat{Z} &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\
\hat{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \quad \text{(Hadamard)} \\
\hat{S} &= |0\rangle\langle 0| + i\,|1\rangle\langle 1| \\
\hat{T} &= |0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/4}\,|1\rangle\langle 1| \\
\hat{CX} &= |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X} \quad \text{(CNOT)}
\end{aligned}
$$

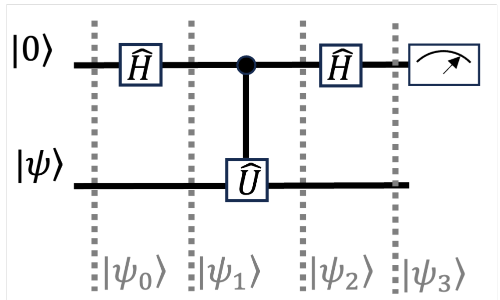

Figure 1: Circuit pour la mesure d'une observable unitaire U. Les première et troisième portes correspondent à des Hadamard. La deuxième porte correspond à une porte U sur le deuxième qubit, conditionnée à l'état du premier qubit. La dernière opération est la mesure de Z du premier qubit.

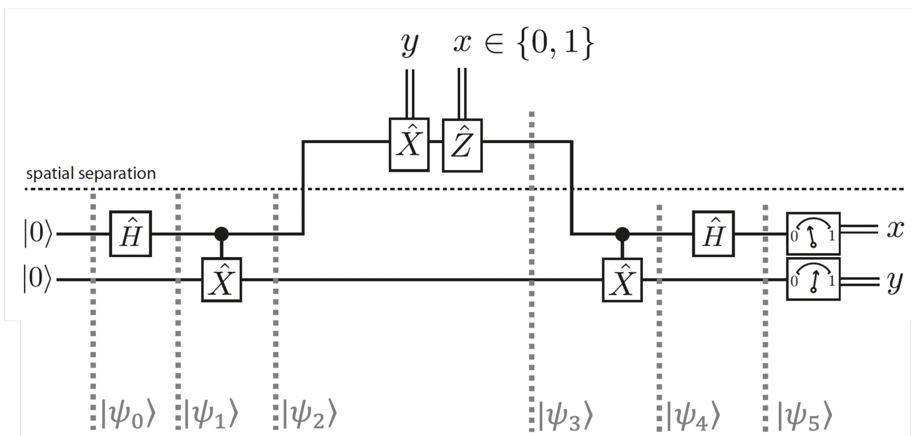

Figure 2: Circuit réalisant le "superdense coding". Les portes utilisées sont Hadamard, control X (aussi connue sous le nom de control NOT, ou CNOT) et des mesures de $\hat{Z}$. La porte $\hat{X}$ avec les deux traits verticaux venants du bit y signifie: j'applique $\hat{X}$ si et seulement si $y = 1$. La même notation est utilisée pour la porte $\hat{Z}$ conditionnée au bit x.