EMINES Examen 2025: Information Quantique (Correction)

Zaki Leghtas*

Jeudi 6 Février 2025

Durée: 1h30. Les documents sont autorisés. Le barême est donné à titre indicatif.

1 Questions de cours (10 points)

Postulat 1: État quantique

1. Exprimez les états $|\pm X\rangle, |\pm Y\rangle, |\pm Z\rangle$ dans la base $|0\rangle, |1\rangle$. Représentez ces 6 états sur la sphère de Bloch.
   $|\pm X\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$, $|\pm Y\rangle = (|0\rangle \pm i\,|1\rangle)/\sqrt{2}$, $|+Z\rangle = |0\rangle, |-Z\rangle = |1\rangle$. Ces états sont représentés sur la sphère de Bloch dans la Figure. 1.

2. Donnez deux exemples d'implémentation physique d'un qubit.

   Voici quelques exemples: les circuits supraconduteurs, les ions piégés, les photons, les atomes froids, les qubits de spin dans le Silicium.

Postulat 2: Mesure quantique

3. Prenons un qubit dans l'état $|\psi_1\rangle = (|0\rangle + 2i\,|1\rangle)/\sqrt{5}$. Je mesure l'opérateur $\hat{Z}$. Quels sont les résultats de mesure possibles ? Quelles sont les probabilités associées ? Dans quel état est projeté le qubit dans chaque situation ?

   Les résultats de mesure sont les valeurs propres de l'opérateur, donc ± 1. Les probabilités associées sont $P(+1) = |\langle 0|\psi_1\rangle|^2 = 1/5$, $P(-1) = |\langle 1|\psi_1\rangle|^2 = 4/5$. Immédiatement après la mesure, le qubit est projeté dans le vecteur propre associé à la mesure: $|0\rangle$ (si on mesure $+1$) et $|1\rangle$ (si on mesure -1).

*zaki.leghtas@ens.fr

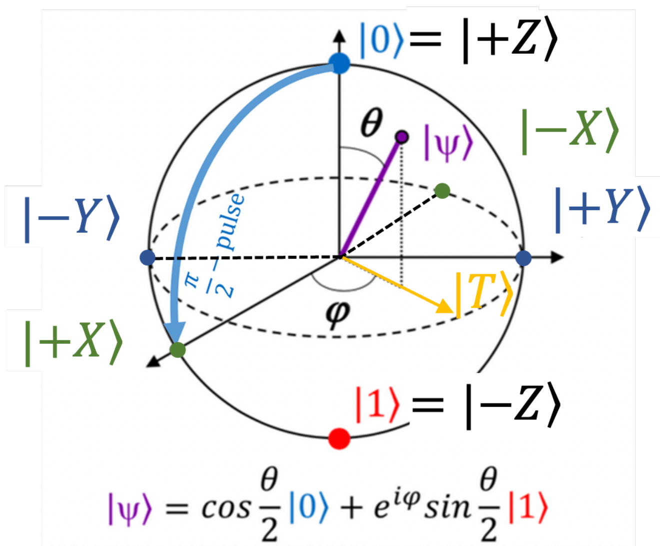

Figure 1: Sphère de Bloch

4. Quelle est la valeur moyenne de la mesure de $\hat{Z}$ sur le qubit dans l'état $|\psi_1\rangle$?

   $\langle\hat{Z}\rangle = \langle\psi_1|\,\hat{Z}\,|\psi_1\rangle = \frac{1}{5}(\langle 0| - 2i\,\langle 1|)\hat{Z}(|0\rangle + 2i\,|1\rangle) = \frac{1}{5}(\langle 0| - 2i\,\langle 1|)(|0\rangle - 2i\,|1\rangle) = \frac{1}{5}(1-4) = -3/5.$

   On peut également trouver ce résultat avec le calcul de la question précédente: $\langle\hat{Z}\rangle = 1 \times P(+1) - 1 \times P(-1) = 1/5 - 4/5 = -3/5.$

Postulat 3: Évolution quantique

5. Démontrez que la porte Hadamard est unitaire.

$$
\begin{aligned}
\hat{H}^\dagger\hat{H} &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle\,\langle 0| + |0\rangle\,\langle 1| + |1\rangle\,\langle 0| + |1\rangle\,\langle 1| + |0\rangle\,\langle 0| - |0\rangle\,\langle 1| - |1\rangle\,\langle 0| + |1\rangle\,\langle 1|) \\
&= |0\rangle\,\langle 0| + |1\rangle\,\langle 1| \\
&= \hat{I}\,.
\end{aligned}
$$

   La porte Hadamard est bien unitaire.

6. Considérons un qubit dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |0\rangle$. L'objectif est de préparer l'état $|\psi(t=T)\rangle = (|0\rangle + e^{i\pi/4}\,|1\rangle)/\sqrt{2}$. Proposez une stratégie pour y parvenir. Une description géométrique en vous aidant de la sphère de Bloch suffira.

   L'état cible $|\psi(t=T)\rangle$ (noté $|T\rangle$) est représenté sur la sphère de Bloch de la Figure.1 en orange. Une stratégie pour atteindre cet état depuis l'état $|0\rangle$ est de commencer par une rotation autour de Y d'angle $\pi/2$, nous atteignons ainsi l'état $|+X\rangle$. Il s'agit ensuite de faire une rotation autour de Z d'angle $\pi/4$ pour atteindre l'état $|T\rangle$.

Postulat 4: Intrication quantique

7. Considérons 2 qubits dans l'état $|\psi_1\rangle = |00\rangle + |11\rangle$. Normalisez cet état. Les deux qubits sont-ils intriqués ?

   Une fois normalisé l'état s'écrit: $|\psi_1\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. Cet état ne peut pas être factorisé, ces qubits sont donc intriqués.

8. Je mesure $\hat{Z}_1$ (l'opérateur Z sur le qubit 1). Quels sont les résultats possibles de la mesure ? Donnez les probabilités associées et l'état des qubits après la mesure.

   Les résultats de mesures sont $+1$ et -1 et les projecteurs associés sont respectivement $\Pi_+ = |0\rangle\,\langle 0| \otimes \hat{I}$ et $\Pi_- = |1\rangle\,\langle 1| \otimes \hat{I}$. On a donc $P(+1) = \|\Pi_+\,|\psi_1\rangle\|^2 = 1/2$.

   L'état des qubits est ensuite projeté vers $\Pi_+\,|\psi_1\rangle\,/\|\Pi_+\,|\psi_1\rangle\| = |00\rangle$.

   De même $P(-1) = \|\Pi_-\,|\psi_1\rangle\|^2 = 1/2$. L'état des qubits est ensuite projeté vers $|11\rangle$.

9. Exprimez l'état $\hat{H}^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n}$ (ici $\hat{H}$ désigne la porte Hadamard)

   Comme démontré en cours, nous avons

$$\hat{H}^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle$$

10. Exprimez l'état $\hat{H}^{\otimes n} |x\rangle$ où x est un string arbitraire dans $\{0,1\}^n$.

   Comme démontré en cours, nous avons

$$\hat{H}^{\otimes n} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \sum_{z \in \{0,1\}^n} (-1)^{x.z} |z\rangle$$

2 Circuits quantiques (10 points)

11. Calculez les états $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ dans le circuit de la Figure 2.

$$\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= |0\rangle \otimes |\psi\rangle \\
&= \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle \\
|\psi_1\rangle &= \alpha |00\rangle + \beta |11\rangle \\
|\psi_2\rangle &= \alpha |00\rangle + \beta |10\rangle \\
&= |\psi\rangle \otimes |0\rangle
\end{aligned}$$

   Les états des qubits 1 et 2 ont été échangés. C'est pourquoi ce circuit est nommé "SWAP" ("échange" en anglais).

12. Calculez les états $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ dans le circuit de la Figure 3.

$$\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= |T\rangle \otimes |\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \alpha e^{i\pi/4} |10\rangle + \beta e^{i\pi/4} |11\rangle \Big) \\
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \alpha e^{i\pi/4} |11\rangle + \beta e^{i\pi/4} |10\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big((\alpha |0\rangle + \beta e^{i\pi/4} |1\rangle) \otimes |0\rangle + (\beta |0\rangle + \alpha e^{i\pi/4} |1\rangle) \otimes |1\rangle \Big)
\end{aligned}$$

   La mesure de $\hat{Z}$ du deuxième qubit donne $+1$ ou -1.
   Cas 1: La mesure donne la valeur propre $+1$. Notez que vu que le vecteur propre associé de $\hat{Z}$ est $|0\rangle$, on dit parfois que le résultat de la mesure est 0. Dans ce cas, on n'applique pas la porte conditionnelle $\hat{S}\hat{X}$. Le

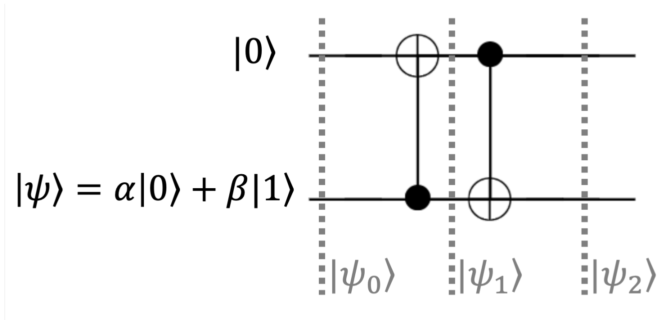

Figure 2: Circuit SWAP. La première porte correspond à une CNOT où le premier qubit est la cible, et le deuxième le contrôle. La deuxième porte correspond à une CNOT où le premier qubit est le contrôle et le deuxième qubit est la cible.

projecteur associé à cette mesure est $\Pi_+ = \hat{I} \otimes |0\rangle\langle 0|$. La probabilité est $P(+1) = \|\Pi_+\psi_1\|^2 = \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} = 1/2$. L'état est donc

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta e^{i\pi/4}|1\rangle \\ &= \hat{T}|\psi\rangle \end{aligned}$$

Cas 2: La mesure donne la valeur propre -1. Notez que vu que le vecteur propre associé de $\hat{Z}$ est $|1\rangle$, on dit parfois que le résultat de la mesure est 1. Dans ce cas, on applique la porte conditionnelle $\hat{S}\hat{X}$. Le projecteur associé à cette mesure est $\Pi_- = \hat{I} \otimes |1\rangle\langle 1|$. La probabilité est $P(-1) = \|\Pi_-\psi_1\|^2 = \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} = 1/2$. L'état est donc

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \hat{S}\hat{X}(\beta|0\rangle + \alpha e^{i\pi/4}|1\rangle) \\ &= \hat{S}(\beta|1\rangle + \alpha e^{i\pi/4}|0\rangle) \\ &= (i\beta|1\rangle + \alpha e^{i\pi/4}|0\rangle) \\ &= e^{i\pi/4}(\alpha|0\rangle + e^{i\pi/4}\beta|1\rangle) \\ &= e^{i\pi/4}\hat{T}|\psi\rangle \end{aligned}$$

Ainsi, quelque soit la mesure, ceci correspond à appliquer la porte $\hat{T}$ à un état arbitraire $|\psi\rangle$ (à une phase globale près). Ceci est accompli en initialisant le premier qubit dans l'état $|T\rangle$ qui est connu sous le nom d'état "magique".

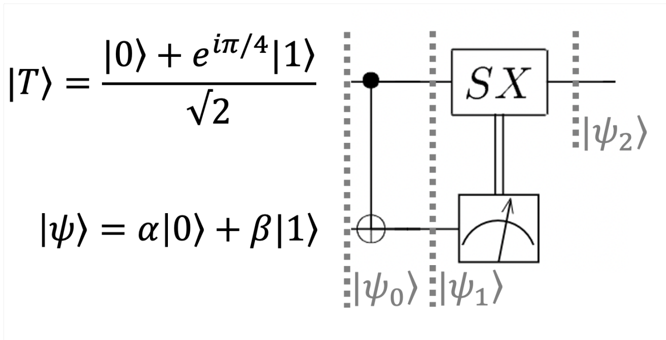

Figure 3: Téléportation d'une porte $\hat{T}$ par injection d'état magique. La première porte indique une CNOT, et la deuxième indique l'application d'une porte $\hat{S}\hat{X}$ au premier qubit, conditionnée au résultat de la mesure de $\hat{Z}$ du deuxième.

3 Notation

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\
\hat{Y} &= -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \\
\hat{Z} &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\
\hat{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \\
\hat{S} &= |0\rangle\langle 0| + i\,|1\rangle\langle 1| \\
\hat{T} &= |0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/4}\,|1\rangle\langle 1| \\
\hat{CX} &= |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X} \qquad \text{(CNOT)}
\end{aligned}
$$