

EMINES Examen 2025: Information Quantique

Zaki Leghtas*

Jeudi 6 Février 2025

Durée: 1h30. Les documents sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif. Les notations utilisées sont rappelées à la fin du sujet.

1 Questions de cours (12 points)

Postulat 1: État quantique

1. Exprimez les états $|\pm X\rangle, |\pm Y\rangle, |\pm Z\rangle$ dans la base $|0\rangle, |1\rangle$. Représentez ces 6 états sur la sphère de Bloch.
2. Donnez deux exemples d'implémentation physique d'un qubit.

Postulat 2: Mesure quantique

3. Prenons un qubit dans l'état $|\psi_1\rangle = (|0\rangle + 2i|1\rangle)/\sqrt{5}$. Je mesure l'opérateur \hat{Z} . Quels sont les résultats de mesure possibles ? Quelles sont les probabilités associées ? Dans quel état est projeté le qubit dans chaque situation ?
4. Quelle est la valeur moyenne de la mesure de \hat{Z} sur le qubit dans l'état $|\psi_1\rangle$?

Postulat 3: Évolution quantique

5. Démontrez que la porte Hadamard est unitaire.
6. Considérons un qubit dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |0\rangle$. L'objectif est de préparer l'état $|\psi(t=T)\rangle = (|0\rangle + e^{i\pi/4}|1\rangle)/\sqrt{2}$. Proposez une stratégie pour y parvenir. Une description géométrique en vous aidant de la sphère de Bloch suffira.

*zaki.leghtas@ens.fr

Postulat 4: Intrication quantique

7. Considérons 2 qubits dans l'état $|\psi_1\rangle = |00\rangle + |11\rangle$. Normalisez cet état. Les deux qubits sont-ils intriqués ?
8. Je mesure \hat{Z}_1 (l'opérateur Z sur le qubit 1). Quels sont les résultats possibles de la mesure ? Donnez les probabilités associées et l'état des qubits après la mesure.
9. Exprimez l'état $\hat{H}^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n}$ (ici \hat{H} désigne la porte Hadamard)
10. Exprimez l'état $\hat{H}^{\otimes n} |x\rangle$ où x est un string arbitraire dans $\{0, 1\}^n$.

2 Circuits quantiques (8 points)

11. Calculez les états $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ dans le circuit de la Figure 1.
12. Calculez les états $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ dans le circuit de la Figure 2.

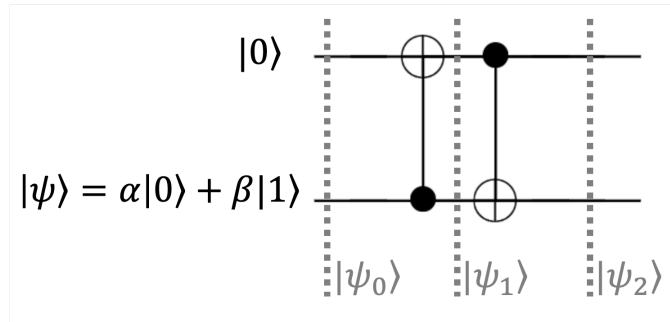


Figure 1: Circuit SWAP. La première porte correspond à une CNOT où le premier qubit est la cible, et le deuxième le contrôle. La deuxième porte correspond à une CNOT où le premier qubit est le contrôle et le deuxième qubit est la cible.

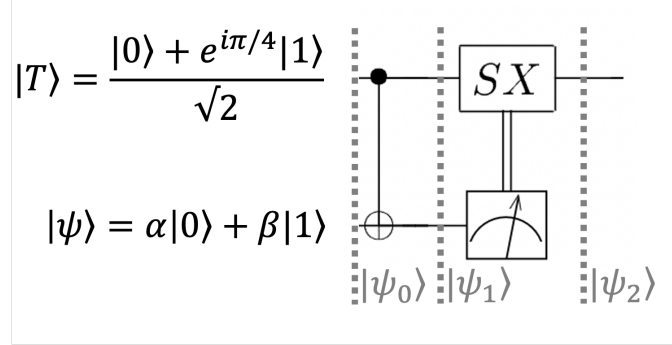


Figure 2: Téléportation d'une porte \hat{T} par injection d'état magique. La première porte indique une CNOT, et la deuxième indique l'application d'une porte $\hat{S}\hat{X}$ au premier qubit, conditionnée au résultat de la mesure de \hat{Z} du deuxième.

3 Notation

$$\begin{aligned}
 \hat{X} &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\
 \hat{Y} &= -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \\
 \hat{Z} &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\
 \hat{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \quad (\text{Hadamard}) \\
 \hat{S} &= |0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1| \\
 \hat{T} &= |0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/4}|1\rangle\langle 1| \\
 \hat{C}X &= |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{T} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X} \quad (\text{CNOT})
 \end{aligned}$$