

# EMINES TD4: Code de surface

Zaki Leghtas\*

Janvier 2026

## 1 Détection d'erreurs dans un code de surface

Le code de surface est une des architectures de correction d'erreur les plus prometteuses. Les prémisses de la théorie ont été introduites par Kitaev et datent du début des années 2000, et l'implémentation expérimentale est au cœur du travail actuel, entre autres, de Google, IBM, Intel, Delft et Zurich. Nous étudierons dans cet exercice un résultat expérimental très récent (Février 2021) du groupe de Delft [Nature Physics 18, 80 (2022), preprint: arXiv:2102.13071].

Les stabilisateurs de ce code à 4 qubits (D1, D2, D3, D4, voir Fig. 1) sont:

$$\mathcal{S} = \{Z_1 Z_3, Z_2 Z_4, X_1 X_2 X_3 X_4\}. \quad (1)$$

L'espace de code stabilisé par  $\mathcal{S}$  est engendré par les états

$$\begin{aligned} |0_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0000\rangle + |1111\rangle), \\ |1_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0101\rangle + |1010\rangle). \end{aligned}$$

### Question de cours

1. Quel est le nombre d'erreurs à 1 qubit possibles dans un registre de  $n$  qubits ? Quelle est la dimension de l'espace minimale pour que ces erreurs soient distinguables par des mesures de stabilisateurs ? Quelle est la dimension de l'espace des états à  $n$  qubits ? En déduire le nombre minimal de qubits nécessaires pour corriger contre toutes les erreurs à 1 qubit.

Chaque qubit peut subir une erreur  $X, Y$  ou  $Z$ . Lorsqu'une erreur  $X$  a lieu on parle de "bit flip", pour  $Z$  on parle de "phase flip" et pour  $Y$  on parle de "bit et phase flip" car  $Y = -iZX$ . Une erreur à 1 qubit dans un registre de  $n$  qubits a lieu lorsqu'un de ces  $n$  qubits subit une erreur  $X, Y, Z$ . Il y a donc  $3n$  possibilités:  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n$ . Ces erreurs sont distinguables si elles transfèrent le sous espace du qubit vers des sous espaces 2 à 2 orthogonaux. Ceci nécessite donc un espace de dimension  $2(1 + 3n)$ . Le premier terme correspond à la dimension du sous espace du qubit  $|0\rangle, |1\rangle$ , et le deuxième à la dimension des  $3n$  paires de vecteurs 2 à 2 orthogonaux.

La dimension de l'espace à  $n$  qubits est  $2^n$ .

Pour que les erreurs à 1 qubit soient distinguables il est nécessaire et suffisant que  $2^n \geq 2 + 6n$ . Le plus petit  $n$  pour lequel cette inégalité est vérifiée est  $n = 5$ .

Il faut donc au minimum un registre de 5 qubits pour protéger contre toutes les erreurs à 1 qubit.

### Mesure des stabilisateurs

2. Calculez l'état à 3 qubits le long du circuit de la Figure 2(a). Nous nous intéresserons au cas général où les qubits  $D_1$  et  $D_3$  sont initialement respectivement dans les états  $\alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle$  et  $\alpha_3 |0\rangle + \beta_3 |1\rangle$ .

---

\*zaki.leghtas@ens.fr

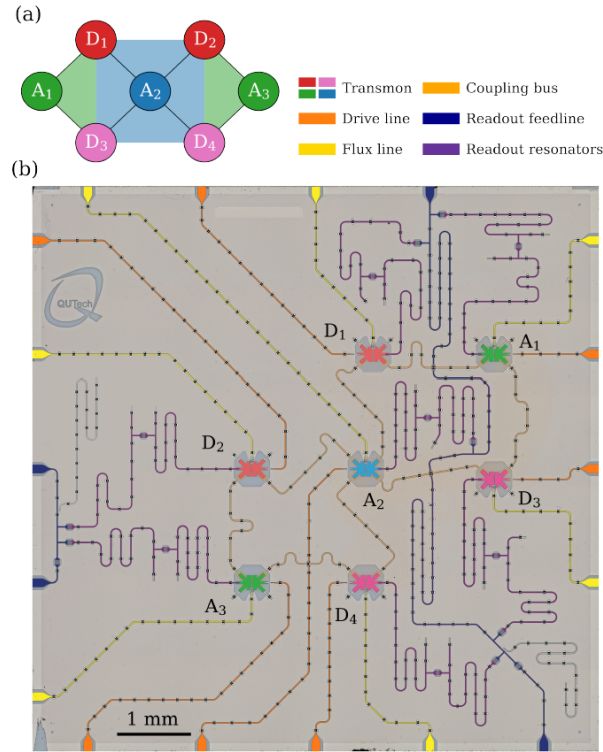


Figure 1: (a) Une plaquette du code de surface. L'information quantique est encodée dans les qubits D1, D2, D3, D4. Les qubits A1, A2, A3 ne servent qu'à mesurer les stabilisateurs. (b) Photographie de l'échantillon expérimental.

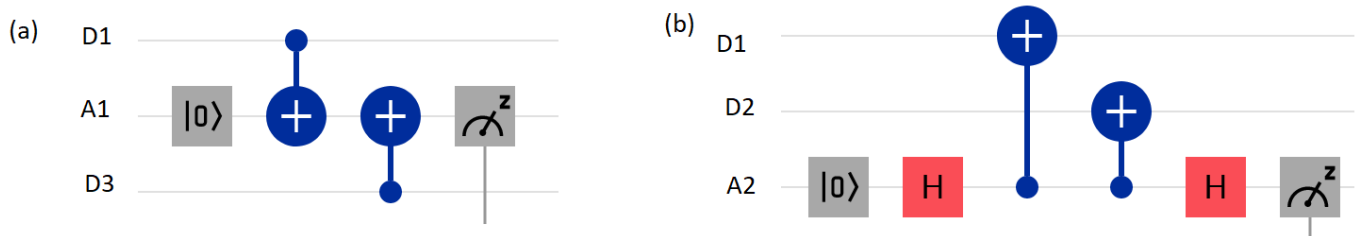


Figure 2: (a) Circuit pour la détection du stabilisateur  $Z_1Z_3$ . (b) Circuit pour la détection de  $X_1X_2$ , qui se généralise à la détection du stabilisateur  $X_1X_2X_3X_4$ .

$$\begin{aligned}
 |\psi_0\rangle &= (\alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes (\alpha_3 |0\rangle + \beta_3 |1\rangle) \\
 &= (\alpha_1 |00\rangle + \beta_1 |10\rangle) \otimes (\alpha_3 |0\rangle + \beta_3 |1\rangle) \\
 |\psi_1\rangle &= (\alpha_1 |00\rangle + \beta_1 |11\rangle) \otimes (\alpha_3 |0\rangle + \beta_3 |1\rangle) \\
 &= \alpha_1\alpha_3 |000\rangle + \beta_1\alpha_3 |110\rangle + \alpha_1\beta_3 |001\rangle + \beta_1\beta_3 |111\rangle \\
 |\psi_2\rangle &= \alpha_1\alpha_3 |000\rangle + \beta_1\alpha_3 |110\rangle + \alpha_1\beta_3 |011\rangle + \beta_1\beta_3 |101\rangle
 \end{aligned}$$

3. Quels sont les résultats possibles pour la mesure du qubit  $A_1$ , et avec quelle probabilité ? Montrez que ceci correspond bien à une mesure du stabilisateur  $Z_1Z_3$ .

On mesure 0 avec la probabilité  $\|(I \otimes \langle 0| \otimes I) |\psi_2\rangle\|^2 = |\alpha_1\alpha_3|^2 + |\beta_1\beta_3|^2$ .

On mesure 1 avec la probabilité  $\|(I \otimes \langle 1| \otimes I) |\psi_2\rangle\|^2 = |\beta_1\alpha_3|^2 + |\alpha_1\beta_3|^2$ .

L'opérateur  $Z_1Z_3 = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| - |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10|$ . Il possède ainsi 2 sous espaces propres chacun de dimension 2. Le premier est engendré par  $\{|00\rangle, |11\rangle\}$  (valeur propre 1) et le second par  $\{|01\rangle, |10\rangle\}$  (valeur propre -1).

Intuitivement, on dit que la mesure de  $Z_1Z_3$  nous indique si les qubits sont dans le même état (1) ou dans deux états opposés (-1).

Initialement les deux qubits  $D1, D3$  sont dans l'état  $|\psi_{13}\rangle = \alpha_1\alpha_3|00\rangle + \beta_1\beta_3|11\rangle + \beta_1\alpha_3|10\rangle + \alpha_1\beta_3|01\rangle$ .

Le mesure de  $Z_1Z_3$  nous donne deux valeurs distinctes avec les probabilités correspondantes à la norme de la projection de  $|\psi_{13}\rangle$  dans chaque sous espace propre, ce qui correspond à  $|\alpha_1\alpha_3|^2 + |\beta_1\beta_3|^2$  et  $|\beta_1\alpha_3|^2 + |\alpha_1\beta_3|^2$ , exactement comme la mesure de  $A1$  dans le circuit de la Figure 2a.

En information quantique la mesure d'observables sur un registre de qubit se fait très souvent par une interaction avec un qubit ancillaire suivi d'une mesure de ce dernier.

4. Calculez l'état à 3 qubits le long du circuit de la Figure 2(b). Nous nous intéresserons au cas général où les qubits  $D_1$  et  $D_2$  sont initialement respectivement dans les états  $\alpha_1|+\rangle + \beta_1|-\rangle$  et  $\alpha_2|+\rangle + \beta_2|-\rangle$  ( $|\pm\rangle$  étant les vecteurs propres de  $X$  pour les valeurs propres  $\pm 1$ ).

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= (\alpha_1|+\rangle + \beta_1|-\rangle) \otimes (\alpha_2|+\rangle + \beta_2|-\rangle) \otimes |0\rangle \\ |\psi_1\rangle &= (\alpha_1|+\rangle + \beta_1|-\rangle) \otimes (\alpha_2|+\rangle + \beta_2|-\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1|+\rangle + \beta_1|-\rangle) \otimes (\alpha_2|+\rangle + \beta_2|-\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1|+\rangle + \beta_1|-\rangle) \otimes (\alpha_2|+\rangle + \beta_2|-\rangle) \otimes |1\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1|+\rangle + \beta_1|-\rangle) \otimes (\alpha_2|+\rangle + \beta_2|-\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1|+\rangle - \beta_1|-\rangle) \otimes (\alpha_2|+\rangle + \beta_2|-\rangle) \otimes |1\rangle \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1|+\rangle + \beta_1|-\rangle) \otimes (\alpha_2|+\rangle + \beta_2|-\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1|+\rangle - \beta_1|-\rangle) \otimes (\alpha_2|+\rangle - \beta_2|-\rangle) \otimes |1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\alpha_2|++\rangle + \beta_1\beta_2|--\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2|+-\rangle + \beta_1\alpha_2|-+\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\ |\psi_4\rangle &= (\alpha_1\alpha_2|++\rangle + \beta_1\beta_2|--\rangle) \otimes |0\rangle + (\alpha_1\beta_2|+-\rangle + \beta_1\alpha_2|-+\rangle) \otimes |1\rangle \end{aligned}$$

5. Quels sont les résultats possibles pour la mesure du qubit  $A_2$ , et avec quelle probabilité ? Montrez que ceci correspond bien à une mesure de  $X_1X_2$ .

Une mesure du qubit  $A2$  donne 0 avec la probabilité  $|\alpha_1\alpha_2|^2 + |\beta_1\beta_2|^2$ , et 1 avec la probabilité  $|\alpha_1\beta_2|^2 + |\beta_1\alpha_2|^2$ . Nous écrivons  $X$  sous la forme  $X = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|$ . Un raisonnement identique à celui de la question 3 (en permutant les rôles de  $|+/-\rangle$  et  $|0/1\rangle$ ) montre que la mesure de  $A2$  correspond bien à une mesure de  $X_1X_2$ .

6. Proposez un circuit (sans le résoudre) qui permette de mesurer  $X_1X_2X_3X_4$ .

En généralisant le circuit de la Fig.2(b), nous proposons le circuit Fig.3 pour la mesure de  $X_1X_2X_3X_4$ .

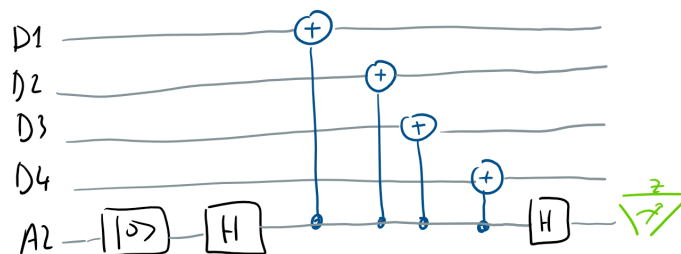


Figure 3: Circuit pour la détection du stabilisateur  $X_1X_2X_3X_4$ .

## Détection d'erreurs

7. Vérifiez que les états  $|0_L\rangle, |1_L\rangle$  sont bien dans l'espace stabilisé par  $\mathcal{S}$ .

Il s'agit de vérifier que les  $|0_L\rangle$  et  $|1_L\rangle$  sont bien vecteurs propres des opérateurs de  $\mathcal{S}$  pour la valeur propre  $+1$ . Nous avons

$$\begin{aligned} Z_1 Z_3 |0_L\rangle &= Z_1 Z_3 \frac{1}{\sqrt{2}} (|0000\rangle + |1111\rangle) , \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (Z_1 |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes Z_3 |0\rangle \otimes |0\rangle + Z_1 |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes Z_3 |1\rangle \otimes |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + (-1) |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes (-1) |1\rangle \otimes |1\rangle) \\ &= |0_L\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 Z_4 |0_L\rangle &= Z_2 Z_4 \frac{1}{\sqrt{2}} (|0000\rangle + |1111\rangle) , \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes Z_2 |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes Z_4 |0\rangle + |1\rangle \otimes Z_2 |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes Z_4 |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes (-1) |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes (-1) |1\rangle) \\ &= |0_L\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 X_2 X_3 X_4 |0_L\rangle &= X_1 X_2 X_3 X_4 \frac{1}{\sqrt{2}} (|0000\rangle + |1111\rangle) , \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 |0\rangle \otimes X_2 |0\rangle \otimes X_3 |0\rangle \otimes X_4 |0\rangle + X_1 |1\rangle \otimes X_2 |1\rangle \otimes X_3 |1\rangle \otimes X_4 |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle + |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= |0_L\rangle \end{aligned}$$

Le raisonnement est identique pour  $|1_L\rangle$ .

8. Comment sont modifiées les valeurs des mesures des stabilisateurs après une erreur  $X_1, Y_1, Z_1$  ?

Notez que sur un même qubit, deux opérateurs de Pauli différents anti-commutent (e.g.  $XY = -YX, XZ = -ZX$ ) et bien évidemment un opérateur commute avec lui-même (e.g.  $XX = XX$ ). De plus deux opérateurs de Pauli sur deux qubits différents commutent (e.g.  $X_1 Y_2 = X_1 \otimes I_2 \times I_1 \otimes Y_2 = I_1 \otimes Y_2 \times X_1 \otimes I_2 = Y_2 X_1$ ). Ainsi

$$\begin{aligned} Z_1 Z_3 (X_1 |0/1_L\rangle) &= -X_1 Z_1 Z_3 |0/1_L\rangle \\ &= -(X_1 |0/1_L\rangle) \\ Z_2 Z_4 (X_1 |0/1_L\rangle) &= X_1 Z_2 Z_4 |0/1_L\rangle \\ &= (X_1 |0/1_L\rangle) \\ X_1 X_2 X_3 X_4 (X_1 |0/1_L\rangle) &= X_1 X_1 X_2 X_3 X_4 |0/1_L\rangle \\ &= (X_1 |0/1_L\rangle) \end{aligned}$$

On voit donc qu'étant donné que  $X_1$  anticommute avec  $Z_1 Z_3$  mais commute avec  $Z_2 Z_4$  et  $X_1 X_2 X_3 X_4$ , si une erreur  $X_1$  a lieu, l'état encodé devient vecteur propre des stabilisateurs pour la valeur propre  $-1$  pour  $Z_1 Z_3$  et  $+1$  pour les deux derniers.

De même  $Y_1$  anticommute avec  $Z_1 Z_3$  et  $X_1 X_2 X_3 X_4$  (donc la valeur propre devient  $-1$ ) mais commute avec  $Z_2 Z_4$  (donc la valeur propre reste  $+1$ ).

Enfin  $Z_1$  anticommute avec  $X_1 X_2 X_3 X_4$  (donc la valeur propre devient  $-1$ ) mais commute avec  $Z_1 Z_3$  et  $Z_2 Z_4$  (donc la valeur propre reste  $+1$ ).

9. Montrez qu'une erreur est détectable si elle anti-commute avec un des stabilisateurs.

Dans un cycle de correction d'erreur les stabilisateurs sont mesurés. Si toutes les valeurs mesurées sont +1, on en déduit qu'aucune erreur n'a eu lieu. Afin qu'une erreur soit détectable il faut qu'au moins une des valeurs propres bascule à -1.

Soit  $|\psi\rangle$  l'état du système avant erreur. Soit  $S$  un stabilisateur. On a donc  $S|\psi\rangle = |\psi\rangle$  (vecteur propre pour la valeur propre +1). Si une erreur  $E$  a lieu, le nouvel état est  $E|\psi\rangle$ . Montrons que si  $E$  et  $S$  anti-commutent, ce nouvel état est vecteur propre de  $S$  pour la valeur propre -1:

$$S(E|\psi\rangle) = -ES|\psi\rangle = -(E|\psi\rangle),$$

ainsi, la mesure de  $S$  sera -1 et l'erreur sera détectée.

10. Nous allons à présent nous intéresser à comment une erreur sur un des qubits impacte les résultats de mesure des stabilisateurs. En analysant les expressions de  $\mathcal{S}$ ,  $|0_L\rangle$ ,  $|1_L\rangle$  et en vous aidant de la Figure 1, justifiez qu'il suffit de s'intéresser à l'impact des erreurs du qubit D1, et de conclure sur le cas des autres qubits par symétrie.

En observant la Figure 1 on voit que le circuit est symétrique gauche-droite, c'est à dire par permutation des qubits  $(1, 3) \leftrightarrow (2, 4)$ , et symétrique haut-bas, c'est à dire par permutation des qubits  $(1, 2) \leftrightarrow (3, 4)$ . On retrouve bien ces symétries en analysant les expressions de  $\mathcal{S}$ ,  $|0_L\rangle$ ,  $|1_L\rangle$ .

11. Remplir le tableau suivant qui permet de déterminer à partir des mesures des stabilisateurs les différents scénarios d'erreurs sur les qubits. (Indice: utilisez le résultat de la question 8 puis de la question 10). Expliquez en quoi ce code permet de détecter une erreur mais pas de la corriger.

Nous nous intéressons dans un premier temps aux erreurs sur le qubit D1.

*Erreur X:*  $X_1$  anticommute avec  $Z_1Z_3$  (donc sa mesure donnera -1), mais commute avec  $Z_2Z_4$  et  $X_1X_2X_3X_4$  (donc les mesures donneront +1 et +1).

*Erreur Y:*  $Y_1$  anticommute avec  $Z_1Z_3$  (mesure -1), mais commute avec  $Z_2Z_4$  (mesure +1), et anticommute avec  $X_1X_2X_3X_4$  (mesure -1).

*Erreur Z:*  $Z_1$  commute avec  $Z_1Z_3$  (mesure 1), commute avec  $Z_2Z_4$  (mesure +1), et anticommute avec  $X_1X_2X_3X_4$  (mesure -1).

$Z_1Z_3$	$Z_2Z_4$	$X_1X_2X_3X_4$	Erreur
1	1	1	pas d'erreur
1	1	-1	$Z_1$
1	-1	1	
1	-1	-1	
-1	1	1	$X_1$
-1	1	-1	$Y_1$
-1	-1	1	
-1	-1	-1	

Utilisons à présent la symmétrie  $(1, 3) \leftrightarrow (2, 4)$

$Z_1 Z_3$	$Z_2 Z_4$	$X_1 X_2 X_3 X_4$	Erreur
1	1	1	pas d'erreur
1	1	-1	$Z_1, Z_2$
1	-1	1	$X_2$
1	-1	-1	$Y_2$
-1	1	1	$X_1$
-1	1	-1	$Y_1$
-1	-1	1	
-1	-1	-1	

Utilisons à présent la symmétrie  $(1, 2) \leftrightarrow (3, 4)$

$Z_1 Z_3$	$Z_2 Z_4$	$X_1 X_2 X_3 X_4$	Erreur
1	1	1	pas d'erreur
1	1	-1	$Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$
1	-1	1	$X_2, X_4$
1	-1	-1	$Y_2, Y_4$
-1	1	1	$X_1, X_3$
-1	1	-1	$Y_1, Y_3$
-1	-1	1	
-1	-1	-1	

Nous voyons que toutes les erreurs à 1 qubit font basculer la valeur propre d'au moins un des stabilisateurs à -1. On peut donc savoir qu'une erreur a eu lieu. Par contre la correspondance entre l'erreur et l'ensemble de mesures n'est pas unique. Par exemple si on détecte  $(1, -1, 1)$  on ne sait pas s'il y a eu une erreur  $X$  sur 2 ou 4. On ne peut donc pas corriger l'erreur.

## 2 Notation

$$\begin{aligned}\hat{X} &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\ \hat{Y} &= -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \\ \hat{Z} &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\ \hat{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \\ C\hat{X} &= |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X} \quad (\text{CNOT})\end{aligned}$$