

# EMINES TD4: Code de surface

Zaki Leghtas\*

Janvier 2026

## 1 Détection d'erreurs dans un code de surface

Le code de surface est une des architectures de correction d'erreur les plus prometteuses. Les prémisses de la théorie ont été introduites par Kitaev et datent du début des années 2000, et l'implémentation expérimentale est au cœur du travail actuel, entre autres, de Google, IBM, Intel, Delft et Zurich. Nous étudierons dans cet exercice un résultat expérimental très récent (Février 2021) du groupe de Delft [Nature Physics 18, 80 (2022), preprint: arXiv:2102.13071].

Les stabilisateurs de ce code à 4 qubits (D1, D2, D3, D4, voir Fig. 1) sont:

$$\mathcal{S} = \{Z_1Z_3, Z_2Z_4, X_1X_2X_3X_4\}. \quad (1)$$

L'espace de code stabilisé par  $\mathcal{S}$  est engendré par les états

$$|0_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0000\rangle + |1111\rangle), \quad (2)$$

$$|1_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0101\rangle + |1010\rangle). \quad (3)$$

### Question de cours

1. Quel est le nombre d'erreurs à 1 qubit possibles dans un registre de  $n$  qubits ? Quelle est la dimension de l'espace minimale pour que ces erreurs soient distinguables par des mesures de stabilisateurs ? Quelle est la dimension de l'espace des états à  $n$  qubits ? En déduire le nombre minimal de qubits nécessaires pour corriger contre toutes les erreurs à 1 qubit.

### Mesure des stabilisateurs

2. Calculez l'état à 3 qubits le long du circuit de la Figure 2(a). Nous nous intéresserons au cas général où les qubits  $D_1$  et  $D_3$  sont initialement respectivement dans les états  $\alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle$  et  $\alpha_3 |0\rangle + \beta_3 |1\rangle$ .

---

\*zaki.leghtas@ens.fr

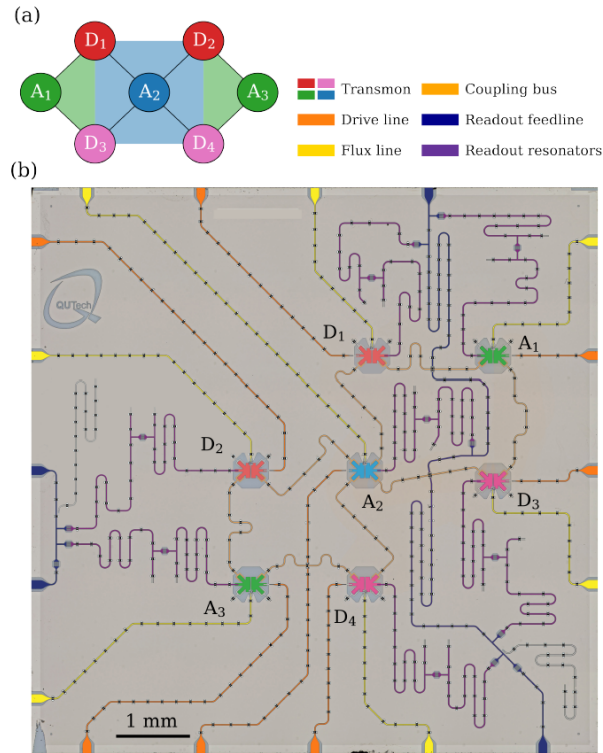


Figure 1: (a) Une plaquette du code de surface. L'information quantique est encodée dans les qubits  $D_1, D_2, D_3, D_4$ . Les qubits  $A_1, A_2, A_3$  ne servent qu'à mesurer les stabilisateurs. (b) Photographie de l'échantillon expérimental.

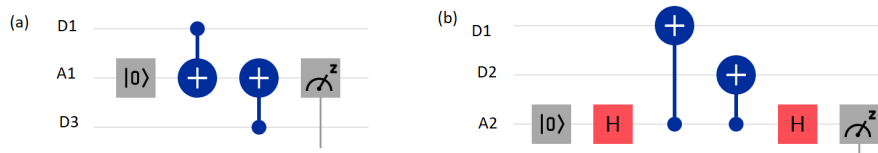


Figure 2: (a) Circuit pour la détection du stabilisateur  $Z_1Z_3$ . (b) Circuit pour la détection de  $X_1X_2$ , qui se généralise à la détection du stabilisateur  $X_1X_2X_3X_4$ .

3. Quels sont les résultats possibles pour la mesure du qubit  $A_1$ , et avec quelle probabilité ? Montrez que ceci correspond bien à une mesure du stabilisateur  $Z_1Z_3$ .
4. Calculez l'état à 3 qubits le long du circuit de la Figure 2(b). Nous nous intéresserons au cas général où les qubits  $D_1$  et  $D_2$  sont initialement respectivement dans les états  $\alpha_1 |+\rangle + \beta_1 |-\rangle$  et  $\alpha_2 |+\rangle + \beta_2 |-\rangle$  ( $|\pm\rangle$  étant

les vecteurs propres de  $X$  pour les valeurs propres  $\pm 1$ ).

5. Quels sont les résultats possibles pour la mesure du qubit  $A_2$ , et avec quelle probabilité ? Montrez que ceci correspond bien à une mesure de  $X_1 X_2$ .
6. Proposez un circuit (sans le résoudre) qui permette de mesurer  $X_1 X_2 X_3 X_4$ .

### Détection d'erreurs

7. Vérifiez que les états  $|0_L\rangle, |1_L\rangle$  sont bien dans l'espace stabilisé par  $\mathcal{S}$
8. Comment sont modifiées les valeurs des mesures des stabilisateurs après une erreur  $X_1, Y_1, Z_1$  ?
9. Montrez qu'une erreur est détectable si elle anti-commute avec un des stabilisateurs.
10. Nous allons à présent nous intéresser à comment une erreur sur un des qubits impacte les résultats de mesure des stabilisateurs. En analysant les expressions de  $\mathcal{S}$ ,  $|0_L\rangle, |1_L\rangle$  et en vous aidant de la Figure 1, justifiez qu'il suffit de s'intéresser à l'impact des erreurs du qubit D1, et de conclure sur le cas des autres qubits par symétrie.
11. Remplir le tableau suivant qui permet de déterminer à partir des mesures des stabilisateurs les différents scénarios d'erreurs sur les qubits. (Indice: utilisez le résultat de la question 8 puis de la question 10). Expliquez en quoi ce code permet de détecter une erreur mais pas de la corriger.

## 2 Notation

$$\begin{aligned}
 \hat{X} &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\
 \hat{Y} &= -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \\
 \hat{Z} &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\
 \hat{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \\
 \hat{C}X &= |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X} \quad (\text{CNOT})
 \end{aligned}$$

$Z_1Z_3$	$Z_2Z_4$	$X_1X_2X_3X_4$	Erreur et probabilité associée
1	1	1	
1	1	-1	
1	-1	1	
1	-1	-1	
-1	1	1	
-1	1	-1	
-1	-1	1	
-1	-1	-1	