EMINES TD2: Non clonage, Téléportation quantique et Inégalité de Bell

Zaki Leghtas*

Janvier 2026

1 Exercices sur les postulats 3 et 4

Dynamique

1. Soit $\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{Z}$ et $|\psi(0)\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Calculez $|\psi(t)\rangle$.
2. Soit $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Je souhaite préparer l'état $|\psi(T)\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$. Proposez une stratégie pour y parvenir.

Intrication

3. Soit $|\psi_1\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, $|\psi_2\rangle = (|0\rangle + i\,|1\rangle)/\sqrt{2}$. Développez $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.
4. Normalisez puis factorisez l'état $|\psi\rangle = |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle$.
5. Normalisez ces états, puis identifiez ceux qui sont intriqués:
   - $|\psi_1\rangle = |00\rangle + |01\rangle$.
   - $|\psi_2\rangle = |01\rangle + |10\rangle$.
   - $|\psi_3\rangle = |01\rangle + e^{i\pi/4}\,|10\rangle$.
6. Calculez $\hat{Z} \otimes \hat{X}\,|\psi\rangle$ où $|\psi\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$.

2 Théorème de non clonage

Nous allons démontré un résultat surprenant en mécanique quantique : il n'existe pas de photocopieuse d'états quantiques ! Ce résultat a été démontré par Wootters et Zurek en 1982. Nous allons procéder à un raisonnement par l'absurde.

Supposons qu'il existe une machine à cloner, représentée par un unitaire $\hat{U}$ telle que $\forall\,|\psi\rangle : U\,|\psi\rangle \otimes |0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$. Ici le $|0\rangle$ joue le rôle de la feuille blanche dans une photocopieuse.

*zaki.leghtas@ens.fr

1. Calculez $\hat{U}|\psi\rangle \otimes |0\rangle$ pour
   - $|\psi\rangle = |0\rangle$
   - $|\psi\rangle = |1\rangle$
   - $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$
2. Conclure sur l'existence de $\hat{U}$
3. Commentez sur la robustesse du protocole de cryptographie quantique BB84.

3 Téléportation quantique

La téléportation quantique est un processus permettant de transférer un état quantique inconnu entre deux agents. Comme nous le verrons dans ce TD, il nécessite que les deux agents partagent une paire de qubits intriqués, et qu'ils soient capables de communiquer de l'information classique.

La téléportation quantique a été découverte dans l'équipe de Wooters en 1993 [Phys. Rev. Lett. 70, 1895]. Ce phénomène remarquable a été observé pour la première fois en 1997 dans les équipes de Zeilinger [Nature 390, 575–579] et Popescu [Phys. Rev. Lett. 80, 1121]. Plus récemment, en 2012, l'équipe de Zeilinger (Autriche) a téléporté un état quantique entre deux Iles Canaries séparées de 143 km [Nature 489, 269–273]. Encore plus récemment, en 2017, l'équipe de Jian-Wei Pan (Chine) a téléporté un état quantique entre deux satellites séparés de 1400 km [Nature 549, 70–73].

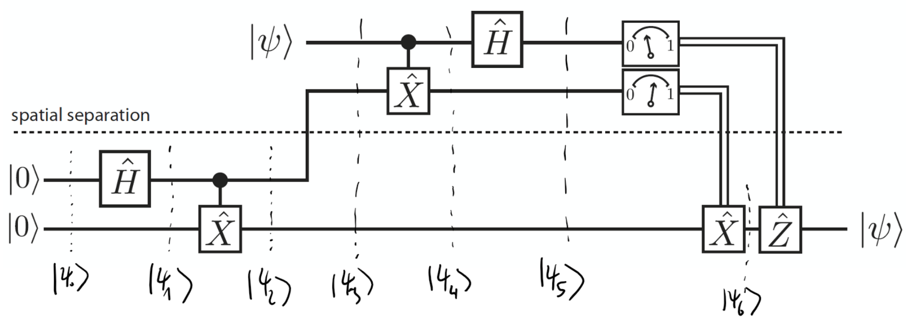

Figure 1: Circuit pour la téléportation quantique d'un état $|\psi\rangle$. Chaque ligne représente un qubit. Les opérations décrites dans des boites sont appliquées les unes après les autres de gauche à droite. L'opération "Contrôle X" représentée par un $\hat{X}$ et relié par un fil à un point au dessus, signifie qu'on applique $\hat{X}$ au qubit de la ligne si et seulement si le qubit du dessus est dans l'état $|1\rangle$. Les deux dernières opérations: $\hat{X}$ et $\hat{Z}$ reliées par des doubles lignes aux mesures, signifient d'appliquer ces opérateurs si et seulement si le résultat des mesures est 1.

Création d'une paire intriquée

1. Calculez $|\psi_{0,1,2}\rangle$.
2. Justifiez que l'état $|\psi_2\rangle$ est intriqué.

Propagation de l'intrication

3. Calculez $|\psi_{3,4,5}\rangle$.

Communication classique

4. Quels sont les résultats possibles de la mesure m du deuxième qubit ? Caculez les états $|\psi_6^m\rangle$ condionnés à cette mesure. En déduire $|\psi_6\rangle$.
5. Quels sont les résultats possibles de la mesure m du premier qubit ? Caculez les états $|\psi_7^m\rangle$ condionnés à cette mesure. En déduire l'état du troisième qubit après la porte conditionnée.

4 Inégalité de Bell

En 1935, un débat animé jaillit entre Einstein, Podolsky et Rosen (EPR) d'un côté, et Bohr de l'autre. EPR affirmaient que la mécanique quantique, due à son indéterminisme, ne pouvait pas être la description réelle de notre monde. Il y aurait forcément une théorie plus complète et déterministe sous-jacente à la mécanique quantique. Einstein disait "God does not play dice". De l'autre côté, Bohr soutenait que l'indéterminisme quantique était réel, et ne découlait d'aucune théorie déterministe.

En 1964, John Bell proposa un test pour trancher ce débat. Il imagina une expérience dont le résultat de mesure S aurait deux scénarios possibles. Soit $S \leq 2$, dans quel cas EPR auraient raison : il existe une théorie déterministe dont la mécanique quantique découle. Soit $2 < S \leq 2\sqrt{2}$, ce qui éliminerait toute origine déterministe. En 1982 Alain Aspect et son équipe implémentèrent le test de Bell, et mesurèrent $S = 2.697 \pm 0.015$, ce qui tranche en faveur de la mécanique quantique. Aspect reçu le prix Nobel en 2022 pour cette découverte.

Montage du test de Bell: Supposons qu'une source distribue un jet de paires de qubits. Un des membres de la paire est envoyé à Alice et l'autre à Bob (Figure. 2). Alice et Bob ont à leurs dispositions des appareils de mesure représentés par les quantités Q, R (pour Alice), et S, T (pour bob). Supposons que ces quatre quantités n'ont que deux résultats possibles ± 1.

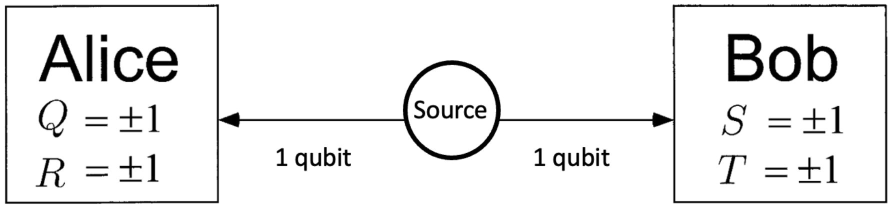

Figure 2: Configuration pour implémenter le test de Bell.

Raisonnement classique:

1. Montrez que la quantité $QS+RS+RT-QT$ n'a que deux valeurs possibles: ± 2.
2. Soit $S = E(QS + RS + RT - QT)$, où $E(.)$ est l'espérance. Montez que $S \leq 2$.

Raisonnement quantique: Supposons maintenant que la source distribue des paires de qubits dans l'état

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \ .$$

Aussi, on suppose que les mesures d'Alice et Bob correspondent aux observables

$$\hat{Q} = \hat{Z}_1, \quad \hat{R} = \hat{X}_1$$

et

$$\hat{S} = (-\hat{Z}_2 - \hat{X}_2)/\sqrt{2}, \quad \hat{T} = (\hat{Z}_2 - \hat{X}_2)/\sqrt{2}$$

.

On définit

$$S = \langle\psi|\hat{Q}\hat{S} + \hat{R}\hat{S} + \hat{R}\hat{T} - \hat{Q}\hat{T}|\psi\rangle$$

3. Calculez S.
4. Conclure

5 Notation

$$\begin{aligned}
\hat{X} &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\
\hat{Y} &= -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \\
\hat{Z} &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\
\hat{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \\
\hat{CX} &= |0\rangle\,\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\,\langle 1| \otimes \hat{X} \qquad \text{(CNOT)}
\end{aligned}$$